

Tartu Ülikool

Matemaatika-informaatikateaduskond

Matemaatilise statistika instituut

Rauno Näksi

Diferentsiaalvõrrandite lahendamine simulatsioonide abil

Bakalaureusetöö

Juhendaja: dotsent Raul Kangro

Tartu 2013

Sisukord

Sisukord.....	2
Sissejuhatus	3
1 Browni liikumine.....	4
2 Stohhastiline diferentsiaalvõrrand.....	8
3 Seos diferentsiaalvõrranditega	11
3.1 Itô valem	11
3.2 Diferentsiaalvõrrandi lahend kui keskväärtus	13
4 Diferentsiaalvõrrandite lahendamine Monte-Carlo meetodiga	15
4.1 Monte-Carlo meetod keskväärtuse leidmiseks	15
4.2 Arvulised eksperimentid.....	18
Solving differential equations with simulations.....	23
Viited.....	24
Lisad	26

Sissejuhatus

Diferentsiaalvõrrandid on matemaatiliseks keeleks, mille abil on võimalik kirjeldada väga paljude reaalse maailma protsesside käitumist, seda nii füüsikas, keemias, bioloogias kui ka finantsmatemaatikas. Huvitaval kombel on paljusid selliseid võrrandeid võimalik ligikaudselt lahendada nii, et simuleerime nn osakese liikumist, vaatame kuhu see jõuab ning leiame lihtsa aritmeetilise keskmise teatud suurustest, mis on arvutatud selle osakese trajektoori ja selle lõppasukoha abil.

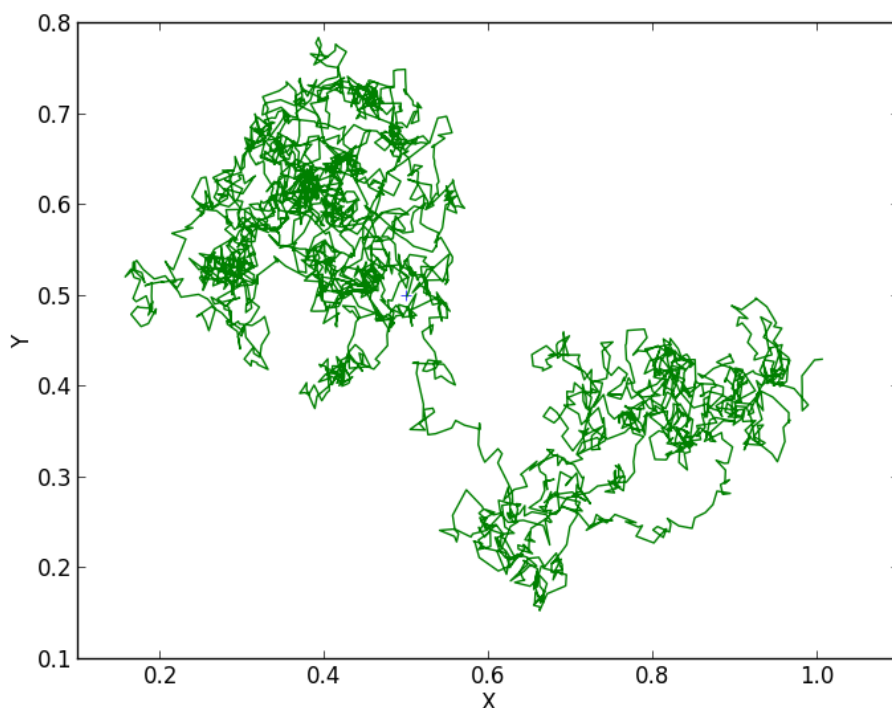
Olulist rolli mängivad töös stohhastilised diferentsiaalvõrrandid (SDV). Tavalisel diferentsiaalvõrrandil on lahendi tulevikuväärtused määratud algtingimustega, kuid SDV korral on lahendiks juhuslik protsess, see tähendab, et samadele algtingimustele vastab palju erinevaid võimalikke tulevikukäitumisi. Töö eesmärgiks on uurida, kuidas on omavahel seotud tavaliste diferentsiaalvõrrandite lahendid ja SDV lahendid.

Töö on jaotatud neljaks peatükiks. Esimeses peatükis tutvume põhjalikult Browni liikumisega. Teises peatükis vaatame, kuidas kasutada Browni liikumist, et defineerida uusi juhuslikke protsesse stohhastilise diferentsiaalvõrrandi abil. Kolmandas peatükis uurima, kuidas on omavahel seotud tavaliste diferentsiaalvõrrandite lahendid ja SDV lahendid ning peatüki lõpus toome esituse diferentsiaalvõrrandi lahendist kui keskvaärtusest. Neljandas peatükis viime läbi eksperimendid, et veenduda teoreetiliste tulemuste kehtivuses ja uurime viiga, mis tekib sellest, et juhusliku protsessi simuleerimisel kasutame lõplikku ajasammu.

Käesolevas töös esitame illustreerivaid jooniseid tulemustest, toome erinevaid näiteid kirjeldatud meetodi rakendamisest. Töös kasutan simulatsioonide läbiviimiseks programmeerimiskeelt Python versioon 3.2.3 ja tarkvarapaketti Matlab versioon 7.12.0.384.

1 Browni liikumine

Üks tuntumatest juhusliku protsessi näidetest on Browni liikumine. Avastati see botaaniku Robert Browni poolt, kes vaatles läbi mikroskoobi viljatera liikumist vees ja pani tähele selle juhuslikku liikumist. Põhjuseks oli vee molekulide pörkamised viljateraga juhuslikul viisil, mille pärast liikus ka viljatera juhuslikult. (Ermogenous, 2006, lk. 1).



Joonis 1. Browni liikumine. Illustreerib viljatera liikumise trajektoori algpunktist (0,5;0,5). Kood lisa 1.

Browni liikumist nimetatakse ka Wieneri protsessiks, nimetatud Norbert Wieneri järgi, kes formaliseeris juhusliku liikumise, mida kirjeldas Robert Brown. Sellest ajast peale on Browni liikumisel rakendusi nii füüsikas (difusiooniteooria) kui majanduses (aktsiahindade mudelid). Käesolevas töös kasutatakse Browni liikumise abil defineeritud juhuslikke protsesse diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks arvutisimulatsioonide kasutamise teel. (Ermogenous, 2006, lk 3-5).

Kuna Browni liikumine on käesoleva töö seisukohalt väga tähtis protsess, toome järgnevas selle seose lihtsa juhusliku ekslemisega. Järgnev tugineb Juhuslike protsesside aine materjalidel. (Pärna, 2013, ptk 8 lk 197).

Ühedimensionaalse juhusliku ekslemise korral iga sammuga võrdse tõenäosusega liidetakse eelmisele väärtusele või lahutatakse eelmisest väärtusest fikseeritud arv (sammu pikkus). Matemaatiliselt saab seda kirjeldada järgnevalt. Tähistame

$$X(t) = \Delta x \left(X_1 + X_2 + \dots + X_{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} \right),$$

kus

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{tõenäosusega } \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{tõenäosusega } \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Δx – ühe sammu pikkus,

Δt – sammu ajaline kestvus,

$\left[\frac{t}{\Delta t}\right]$ – suhte $\frac{t}{\Delta t}$ täisosa, sammude arv ajavahemikus $[0, t]$.

Sõnastame tsentraalse piirteoreemi, mida kasutame käesolevas töös korduvalt.

Teoreem 1 (Pärna, 2013, lk 119) Tsentraalne piirteoreem: Olgu $X_i, i = 1, 2, \dots$ sama jaotusega sõltumatud suurused. Juhusliku suuruse $Y_n = \frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$, kus $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, jaotusfunktsioon läheneb protsessis $n \rightarrow \infty$ standardse normaaljaotuse jaotusfunktsioonile, st

$$P\left\{\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(t),$$

kus

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

■

Eelnevat koondumist nimetatakse ka koondumiseks jaotuse järgi ning tähistatakse

$\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1)$, kus $N(0,1)$ on standardne normaaljaotus.

Laseme $\Delta t \rightarrow 0, \Delta x \rightarrow 0$, siis sellest järeldub, et $\left[\frac{t}{\Delta t}\right]$ kasvab (sammude arv suureneb).

Kuna $X_1, X_1, \dots, X_{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}$ on sõltumatud sama jaotusega juhuslikud suurused, mille korral

$$EX_1 = 0, DX_1 = 1, EX(t) = 0, DX(t) = (\Delta x)^2 \left[\frac{t}{\Delta t}\right],$$

siis tsentraalse piirteoreemi põhjal kehtib, et kui $\Delta t \rightarrow 0$, siis $\frac{X(t)}{\Delta x \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}} \xrightarrow{D} N(0,1)$. Valime

Δx sellise, et $\frac{\Delta x^2}{\Delta t} = \text{const} = c^2$. Sel juhul, $\Delta x \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} \rightarrow c\sqrt{t}$. See tuleneb sellest, et

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t} = c^2 \Rightarrow \Delta x = c\sqrt{\Delta t},$$

$$t - \Delta t \leq \Delta t \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} \leq t \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} = t,$$

millest saame

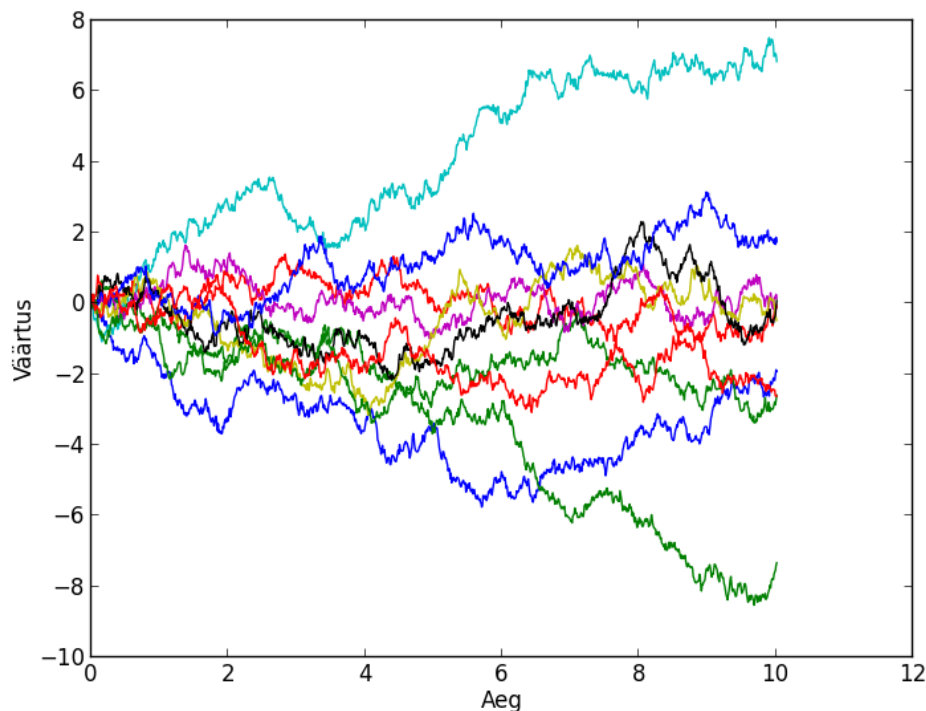
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x \sqrt{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} c \sqrt{\Delta t \left[\frac{t}{\Delta t}\right]} = c \sqrt{\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta t \left[\frac{t}{\Delta t}\right]} = c\sqrt{t}.$$

Sellest saame, et $X(t) \sim N(0, c\sqrt{t}), DX(t) = c^2 t$. Eelnev arutelu annab võimaluse kirjutada välja Browni liikumise definitsiooni.

Definitsioon Browni liikumine: Juhuslikku protsessi $\{B(t), t \geq 0\}$ nimetatakse Browni liikumiseks ehk Wieneri protsessiks, kui

- $B(0) = 0$,
- $B(t)$ juurdekasvud on statsionaarsed (karakteristikud on ajas konstantsed) ja sõltumatud,
- $\forall t > 0$ korral $B(t) \sim N(0, c\sqrt{t})$, kus $c > 0$ on konstant.

Siin t on sammu pikkus. Kui $c \equiv 1$, siis Browni liikumist nimetatakse standardseks Browni liikumiseks. Edasipidi vaatleme ainult standardset Browni liikumist.



Joonis 2. Standardse Browni liikumise $N(0,1)$ 10 erinevat trajektoori, kus sammude vaheline pikkus on $\Delta t = 0,01$, vahemikul $[0,10]$. Kood lisa 2.

Järgnevalt annan eeskirja Browni liikumise trajektoori simuleerimiseks. Statsionaarsuse kohaselt $t_2 > t_1$ korral $B(t_2) - B(t_1)$ ning $B(t_2 + t) - B(t_1 + t)$ on iga t korral sama jaotusega. Valides $t = -t_1$, saame, et $B(t_2) - B(t_1)$ on sama jaotusega, kui $B(t_2 - t_1)$, see tähendab $B(t_2) - B(t_1) \sim N(0, \sqrt{t_2 - t_1})$. Ajamomendil $t_i = i\Delta t$, saame juurdekasvude sõltumatuse tõttu, et $B(t_{i+1}) - B(t_i)$ on sõltumatud jaotusega $N(0, \sqrt{\Delta t})$ juhuslikud suurused. Kuna $B(t_i) = (B(t_i) - B(t_{i-1})) + (B(t_{i-1}) - B(t_{i-2})) + \dots + (B(t_1) - B(t_0))$, siis saame Browni liikumise trajektoori väärtused kohal $t_i = i\Delta t$ leida nii, et simuleerime sõltumatud juhuslikud suurused $X_i \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$ ning leiame osasummad $0, X_1, X_1 + X_2, X_1 + X_2 + X_3, \dots, X_1 + \dots + X_n$.

Järgnevas kasutame Browni liikumist selleks, et stohhastilise diferentsiaalvõrrandi abil defineerida uusi juhuslikke protsesse.

2 Stohhastiline diferentsiaalvõrrand

Stohhastiline diferentsiaalvõrrand (SDV) on diferentsiaalvõrrand, mille üks või enam liikmetest on juhuslik protsess, millest tuleneb, et selle lahend on ka juhuslik protsess. SDV kasutakse mitmete mudelite loomiseks, näiteks kasutakse SDV aktsia hindade mudelite loomiseks.

Käesolevas töös kasutatakse SDV kujuks on

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t), \quad (1)$$

kus B on Browni liikumine ja μ, σ antud funktsioonid. SDV (1) on mugavam kuju integraalvõrrandist

$$X(t) = X_0 + \int_0^t \mu(X(u))du + \int_0^t \sigma(X(u))dB(u), 0 \leq t \leq T,$$

kus algseisund X_0 on protsessi $X(t)$ väärtus kohal $t = 0$. (Øksendal, 2000. ptk 5 lk 61).

Paneme lisaks tähele, et kui SDV (1) puhul $\sigma \equiv 0$ ja X_0 on konstant, siis SDV (1) muutub tavaliseks algtingimustega diferentsiaalvõrrandiks $\frac{dX(t)}{dt} = \mu(X(t))$, $X(0) = X_0$.

SDV heuristiliseks tähenduseks on, et väikese ajavahemiku pikkuse δ korral muutub stohhastilise protsessi $X(t)$ väärtus ajavahemikul $(t, t + \delta)$ juhusliku suuruse võrra, mille tinglik jaotus ajal t olemasoleva informatsiooni põhjal on normaaljaotus keskvaertusega $\mu(X(t))\delta$ ja dispersiooniga $\sigma(X(t))^2\delta$. See on sellepärast, et Wieneri protsessi muutused on sõltumatud ja normaaljaotusega. (Shalizi, 2013, lk 1)

SDV (1) ligikaudseks lahendamiseks ehk sellele võrrandile vastava protsessi trajektoorige ligilähedase trajektoori leidmiseks saab kasutada Euleri-Maruyama meetodit. (Maruyama, 1955, lk 48-90). Selleks tuleb esmalt $[0, T]$ jaotada väiksemateks lõikudeks. Selleks olgu $\Delta t = T/L$, kus L on positiivne täisarv, ja $t_n = n\Delta t$.

Euleri-Maruyama meetod: Olgu meil SDV (1) koos algtingimusega $X(0) = X_0$, siis $n = 0, \dots, N - 1$ jaoks leiame $X(t_{n+1})$ lähisväärtused vastavalt valemile

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t \mu(X_n) + \sigma(X_n)\Delta B_n,$$

kus

$$\Delta B_n = B(t_{n+1}) - B(t_n) \sim N(0, \sqrt{\Delta t}).$$

■

Järgnevalt tõestame abitulemuse, mida kasutame SDV (1) lahendi keskvaartuse uurimiseks.

Lemma 1: Kui $Y_i, i = 1 \dots n$ on sõltumatud pidevad juhuslikud suurused ja $g(Y_1, \dots, Y_{n-1})h(Y_n)$ on sellised funktsioonid, et $E(g(Y_1, \dots, Y_{n-1})), E(h(Y_n))$ eksisteerivad, siis

$$E(g(Y_1, \dots, Y_{n-1})h(Y_n)) = E(g(Y_1, \dots, Y_{n-1}))E(h(Y_n)).$$

Tõestus: Olgu f_{Y_i} suuruste Y_i tõenäosustiheduse funktsioonid, siis (Y_1, \dots, Y_n) tihedusfunktsiooniks on $f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = f_{Y_1}(y_1) \dots f_{Y_n}(y_n)$. Seega

$$\begin{aligned} E(g(Y_1, \dots, Y_{n-1})h(Y_n)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, \dots, y_{n-1})h(y_n) f_{Y_1}(y_1) \dots f_{Y_n}(y_n) dy_1, \dots, y_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, \dots, y_{n-1}) f_{Y_1}(y_1) \dots f_{Y_{n-1}}(y_{n-1}) dy_1, \dots, dy_{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} h(y_n) f_{Y_n}(y_n) dy_n \\ &= E(g(Y_1, \dots, Y_{n-1}))E(h(Y_n)) \end{aligned}$$

■

Nüüd saame sõnastada meile huvipakkuva järelduse SDV keskvaartusest.

Järeldus 1 Kui meie SDV ainsaks liikmeks on $\sigma(X(t))dB(t)$, siis selle SDV keskvaartus on konstantne.

Tõestus: Selleks vaatleme juhtu, kus $\mu = 0$. Kasutades Euleri-Maruyama meetodit saame

$$X_{n+1} = X_n + \sigma X_n \Delta B_n.$$

Siit on näha, et X_i avaldub $\Delta B_0, \dots, \Delta B_{i-1}$ kaudu ehk on antud funktsioonina. Seega

$$E(X_{n+1}) = EX_n + E[(\sigma(X_n(\Delta B_0, \dots, \Delta B_{n-1})))\Delta B_n].$$

Eelneva lemma 1 põhjal saame, et

$$E(\sigma(X_n)\Delta B_n) = E(\sigma(X_n))E(\Delta B_n) = E(\sigma(X_n))0 = 0.$$

Seega $E(X_n) = E(X_0) \forall n$ korral. Et piiril $\Delta t \rightarrow 0$ kehtib $X_{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor} \xrightarrow{D} X(t)$, saame

$$E(X(t)) = 0 \forall t. \quad \blacksquare$$

Näiteks olgu meil geomeetriline Browni liikumine

$$dX(t) = rX(t)dt + \sigma X(t)dB(t),$$

kus r ja σ on reaalarvulised konstandid.

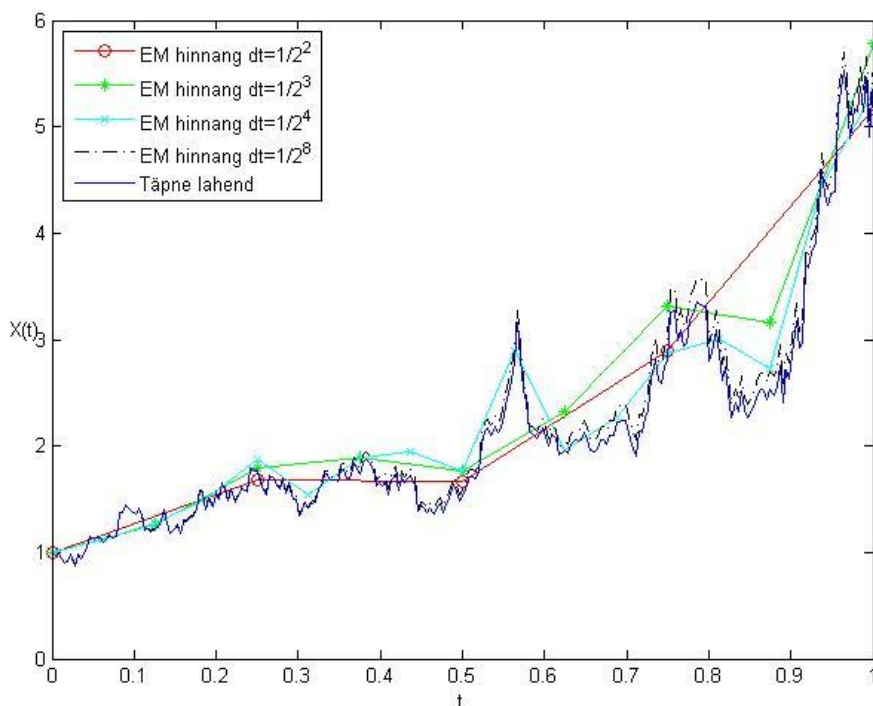
Siis Euler-Maruyama meetodi abil saame $X(i\Delta t)$ ligilähedased väärtused X_i , mis on antud kujul

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t \cdot r X_n + \sigma X_n \Delta B_n,$$

näitame, et sel juhul

$$X_t = X_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)}.$$

Vaatame juhtu, kui $r = 2$, $\sigma = 1$ ja $X_0 = 1$. Täpse laheni trajektoor on toodud joonisel 4 pideva joonega vahemikus $[0,1]$. Samale Browni liikumise trajektoorele vastavad Euler-Maruyama meetodi abil arvutatud ligikaudseid väärtusi vaatame erinevate sammupikkuste ($2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-8}$) korral.



Joonis 4. Euler-Maruyama meetod. Sinine joon on täpse lahendi samale Browni liikumise trajektoorige vastav trajektoor. Kood on lisas 4.

Nagu nähes eelnevalt, et vähendades sammude pikkust (suurendades trajektoori punktide arvu) läheneme täpsele lahendile.

3 Seos differentiaalvõrranditega

3.1 Itô valem

Itô valemit kasutatakse juhuslikest protsessidest sõltuvate funktsioonide diferentsiaalide leidmiseks. Itô valem on laialdaselt kasutusel finantsmatemaatikas.

Vaatame alguseks SDV (1), mille saab kirja panna integraalvõrrandina

$$X(t+s) - X(t) = \int_t^{t+s} \mu(X(u)) du + \int_t^{t+s} \sigma(X(u)) dB(u),$$

kus viimast integraali nimetatakse Itô integraaliks, mille definitsiooni anname järgnevalt.

Definitsioon Itô integraal: (Øksendal, 2000, lk 29) Olgu $c = t_0 < t_1 \dots < t_{n-1} < t_n = d$ punktid intervallis $[c, d]$. Itô integraali defineeritakse kui piirväärtus

$$I = \int_c^d \mu(t) dB(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(t_{i-1}) \Delta B_i,$$

kus $\Delta B_i = B(t_i) - B(t_{i-1})$ on Browni liikumise samm intervallis.

■

SDV analüütiliseks lahendamiseks kasutame stohhastilist liitfunktsiooni diferentseerimise reeglit, Itô valemit. Parameetrite väärtused sõltuvad ajast ja süsteemi olekust.

Itô valem: (Øksendal, 2000, lk 43) Olgu f kaks korda pidevalt diferentseeruv kahe muutuja funktsioon ning rahuldagu protsess X stohhastilist diferentsiaalvõrrandit

$$dX(t) = \alpha(X(t), t)dt + \beta(X(t), t)dB(t),$$

kus $\alpha(X(t), t)$ ja $\beta(X(t), t)$ on pidevad protsessid ning B on Browni liikumine. Sõltugu funktsioon f veel ka ajast, olgu $Y = f(X(t), t)$, siis saame Itô valemi üldkuju

$$dY = \frac{\partial f}{\partial t}(X(t), t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(X(t), t)dX(t) + \frac{1}{2}\beta(X(t), t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X(t), t)dt.$$

■

Üks tuntumaid näited illustreerimaks tüüpilise SDV tähtsust on finantsmatemaatikas kasutusel olev Black-Scholesi turumudel, mille löid Fischer Black ja Myron Scholes. Nad said Nobeli preemia selle eest 1997 aastal. Järgnev arutelu kuni peatüki lõpuni põhineb Raul Kangro simulatsioonimeetodid finantsmatemaatikas aine materjalide (Kangro, 2006) põhjal. Black-Scholesi difusiooni võrrand:

$$\begin{cases} dX = \mu X dt + \sigma X dB_t \\ X(0) = X_0 \end{cases},$$

μ ja σ on konstandid. Tänu võimalusele, et selle võrrandi saab lahendada täpselt, saab kätte Black-Scholesi valemi, mis annab vahendi Euroopa stiilis optsoonide hindamiseks. Näiteks olgu $X = S(t)$ aktsiahinna käitumine, siis

μ näitab hinna suhtelist muutust ühe ajaühiku kohta,

$dB(t)$ on hinnamuutuse juhuslik osa, mis käitub väikese ajavahemiku Δt korral nagu Browni liikumise juurdekasv,

σ näitab juhusliku komponendi osatähtsust hinna arengus (volatiilsuse (väärtpaberi hinna kõikumine lühikese perioodi jooksul) parameeter).

Selle analüütiliseks lahendiks on

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t)\right).$$

Vaatame järgnevalt, kuidas jõuda sellisele analüütilisele lahendile.

Olgu meil SDV

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \quad S(0) = S_0.$$

Vaatame nüüd $\ln S(t)$ ja rakendame nüüd Itô valemit

$$\begin{aligned} d(\ln S(t)) &= f'(S(t))dS(t) + \frac{1}{2}f''(S(t))S(t)^2\sigma^2dt \\ &= \frac{1}{S(t)}(\sigma S(t)dB(t) + \mu S(t)dt) - \frac{1}{2}\sigma^2dt = \sigma dB(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt, \end{aligned}$$

millest saame, et

$$\ln S(t) = \ln S(0) + \sigma B(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t \Rightarrow \ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \sigma B(t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t.$$

Rakendades funktsiooni e^x võrrandi mõlemale poolele, siis olemegi saanud kätte analüütilise lahendi.

3.2 Diferentsiaalvõrrandi lahend kui keskväärus

Olgu meil u , mis rahuldab võrrandit

$$\frac{1}{2}\sigma(x)^2u''(x) + b_1(x)u'(x) - c(x)u(x) = -g(x), \quad (2)$$

kus $a \leq x \leq b$, $u(a) = f(a)$, $u(b) = f(b)$. Osutub, et selle võrrandi lahendi väärtus punktis x on seotud

$$dX(t) = b_1(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t), \quad X(0) = x \quad (3)$$

lahendi käitumisega.

Olgu u võrrandi (2) lahend. Vaatleme juhtu, kus c on konstant ja $g = 0$. Vaatleme protsessi $Y(t) = e^{-ct}u(X(t))$. Ito valemist juhul $f(x, t) = e^{-ct}u(x)$, saame

$$\begin{aligned} dY(t) &= -ce^{-ct}u(X(t))dt + e^{-ct}u'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}e^{-ct}u''(X(t))\sigma^2(X(t))dt \\ &= e^{-ct}\left(\frac{1}{2}u''(X(t)) + b_1(X(t))u'(X(t)) - cu(X(t))\right)dt \\ &\quad + \sigma(X(t))u'(X(t))e^{-ct}dB(t) = \sigma(X(t))e^{-ct}u'(X(t))dB(t). \end{aligned}$$

Kuna $dY(t)$ avaldise ainsaks liikmeks jäi $dB(t)$ liige, siis järelduse 1 põhjal

$$E(Y(x)) = E(Y(0)) = c(x).$$

Olgu meil τ defineeritud järgnevalt

$$\tau = \inf(t : X(t) = a \vee X(t) = b).$$

Saab näidata (martingaalid kursuses (Pärna, 2006)), et keskvärtus jääb konstantseks kui $Y(t)$ asemel vaadata $Y(\min(t, \tau))$, seega piisava suure t korral $\min(t, \tau)$ on τ ning seetõttu $u(x) = E(Y(\tau))$.

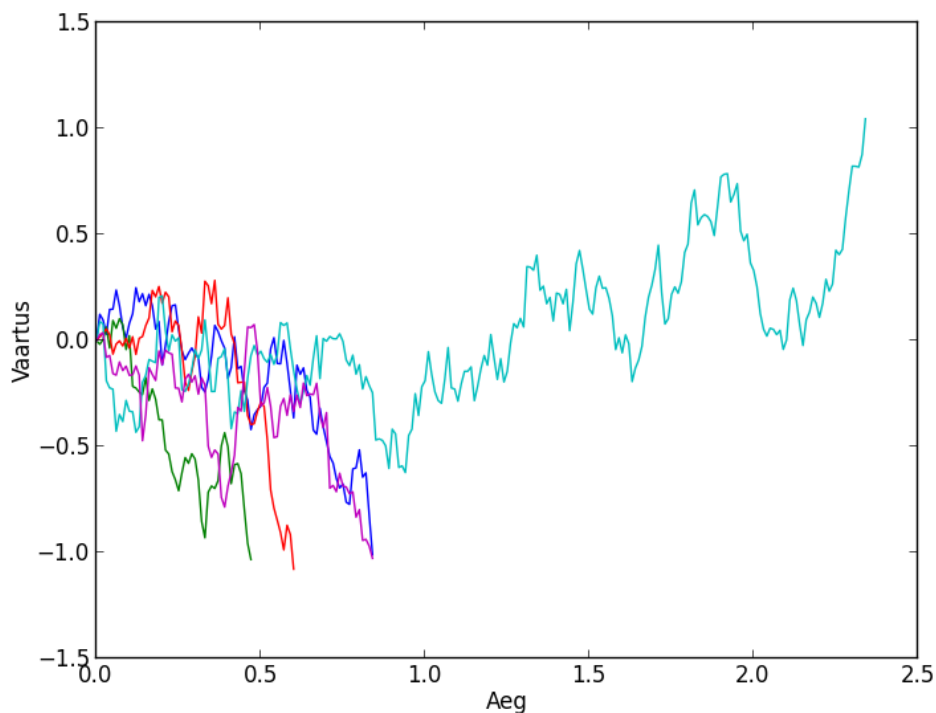
Üldisemal juhul on võrrandi (2) lahendi seos protsessiga (3) toodud järgmises teoreemis.

Teoreem 2 lahendi esitusest keskvärtusena (Karatzas, Shreve, 1994, ptk 7.2 lk 364): Kui $E(\tau) < \infty$, siis

$$u(x) = E\left(f(X(\tau))e^{-\int_0^\tau c(X(s))ds} + \int_0^\tau g(X_t)e^{-\int_0^t c(X(s))ds}dt\right).$$

■

Alloleval joonisel 3 näeme juhul $a = -1, b = 1, \sigma = 1, b_1 = 0$ graafiliselt, kust tulevad $\tau, f(X(\tau))$ väärtused ehk kui kaua läheb aega, et Browni liikumine jõuaks lõigu $[a, b]$ rajani ja mis rajani ta jõudis.



Joonis 3. Browni liikumine. 5 erinevat trajektoori. Kood lisa 3.

4 Diferentsiaalvõrrandite lahendamine Monte-Carlo meetodiga

Eelnevas peatükis esitasime diferentsiaalvõrrandi lahendi keskvaartuse kujul. Keskvaartuste leidmiseks on üheks populaarsemaks meetodiks nn Monte-Carlo meetod.

4.1 Monte-Carlo meetod keskvaartuse leidmiseks

Monte-Carlo meetodi idee juhusliku suuruse funktsiooni keskvaartuse leidmiseks on lihtne. (Möls, 2012). Selleks tuleb leida funktsiooni väärtus suure arvu juhuslike punktide korral. Võttes saadud väärtuste keskmise, olemegi saanud ligikaudse keskvaartuse. Matemaatiliselt võime seda järgmiselt. Olgu Z juhuslik suurus. Suuruse $f(Z)$ keskvaartuse leidmiseks moodustame Z jaotusest suurusega n valimi Z_1, Z_2, \dots, Z_n ning arvutame $\theta = Ef(Z)$ hinnangu kujul

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(Z_i).$$

Kuna valim on juhuslik, siis saadud hinnang on samuti juhuslik. Sageli on vaja lisaks keskväärtuse hinnangule teada ka leitud hinnangu täpsust. Selleks on kasutatavad järgnevad tulemused.

Monte-Carlo meetodi veahinnang: (Kangro, 2011). Olgu X_1, X_2, \dots sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste jada, kusjuures $EX_i = a$ ja $DX_i = \sigma^2 < \infty$. Olgu $H_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$. Siis kehtib hinnang

$$P(|H_n - a| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Tõestus. Järgnevas tõestuses kasutan Tšebõšovi võrratust.

Tšebõšovi võrratus: Kui juhusliku suuruse dispersioon $DX < \infty$ ja keskväärtus on EX , siis

$$P\{|X - EX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

Kuna

$$DH_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n DX_i = \frac{\sigma^2}{n}, \quad EH_n = a,$$

siis toodud veahinnang järeldub otseselt Tšebõšovi võrratusest.

■

Kuna me ei tea vaadeldava juhusliku suuruse dispersiooni, siis tuleb veahinnangu leidmisel kasutada dispersiooni hinnangut

$$\overline{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n X_i)^2}{n}}{n-1},$$

mis tuleb dispersiooni hinnangu valemist

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_i)^2 \Rightarrow \overline{\sigma^2} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_i^2 \right),$$

kus $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Eelnev veahinnang kehtib alati, sõltumata katsete arvust ja vaadeldava juhusliku suuruse jaotusest. Enamasti läheb vaja aga suure arvu sõltumatute katsete tulemusi

ning sel juhul on võimalik saada tehtavale veale täpsemaid hinnanguid, kasutades tsentraalset piirteoreemi.

Monte-Carlo ligikaudne viga: (Kangro, 2011). Olgu X_1, X_2, \dots sõltumatute sama jaotusega juhuslike suuruste jada, kusjuures $EX_i = a$ ja $DX_i = \sigma^2 < \infty$. Olgu

$$H_n = \frac{S_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n},$$

siis suure n korral kehtib ligikaudne võrdus

$$P(|H_n - a| \geq \varepsilon) \approx 2\Phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

■

Tõestus: Tõestuseks kasutame tsentraalset piirteoreemi

$$P\left(\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(t),$$

kus näeme, et $\frac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \leq t \Rightarrow H_n - a \leq \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Tähistades $t = \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}$ saame

$$P(H_n - a \leq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Kuna

$$\begin{aligned} P(|H_n - a| \geq \varepsilon) &= P(\{H_n - a \geq \varepsilon\} \cup \{H_n - a \leq -\varepsilon\}) = \\ &= P(H_n - a \geq \varepsilon) + P(H_n - a \leq -\varepsilon). \end{aligned}$$

Nüüd kasutame omadust, et

$$P(H_n - a \geq \varepsilon) = 1 - P(H_n - a < \varepsilon),$$

mis on ligikaudu (ja pidevate juhuslike suuruste X_i korral täpselt) võrdne suurusega $1 - P(H_n - a \leq \varepsilon)$ ning see on omakorda võrdne ligikaudu $1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$. Kasutades Φ omadust $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$ saame, et

$$P(|H_n - a| \geq \varepsilon) \approx \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{-\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

■

Järeldus 2 (Kangro, 2011) Suure n korral on suuruse H_n viga väiksem suurusest

$$\varepsilon = \frac{-\Phi^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sigma}{\sqrt{n}}$$

Tõenäosusega $1 - \alpha$.

■

4.2 Arvulised eksperimentid

Vaatleme diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{1}{2}u''(x) + b_1 u'(x) - cu(x) = -g(x), \quad a \leq x \leq b,$$

mille rajatingimusteks on

$$u(a) = f(a) = 1, \quad u(b) = f(b) = 0,$$

kus f on mingi funktsioon, mis omab toodud väärtusi kohtadel $x = a$ ja $x = b$.

Järgnevalt uurime, kuidas käitub Monte-Carlo meetod selle ülesande ligikaudselt lahendamisel. Tuletame meelde, et vastavalt teoreemile 2 esitub selle ülesande lahend keskväärtusena

$$u(x) = E\left(f(X(\tau))e^{-c\tau} + \int_0^\tau g(X(t))e^{-ct} dt\right),$$

kus $\tau = \inf(t : X(t) = a \vee X(t) = b)$.

Monte Carlo meetodi rakendamisel arvutame protsessi $X(t)$ (lähis)väärtused sammuga Δt , seetõttu tekib sammupikkusest tingitud viga τ leidmisel isegi siis, kui X väärtused õnnestub täpselt leida. Järelikult peab tulemuste tõlgendamisel arvestama, et leitud lähisväärtuse koguviga on Monte-Carlo meetodi vea ning sammu pikkusest tingitud vea summa.

Vaatleme esimesena juhtu $c = 1, b_1 = 1, a = 0, b = 1$ ja kus $g(x) = 0$. Vaadeldaval juhul on võrrandi lahend antud valemiga

$$u(x) = \frac{e^{-(1+\sqrt{3})x}(e^{2\sqrt{3}} - e^{2\sqrt{3}x})}{e^{2\sqrt{3}} - 1},$$

mida kasutades saame leida Monte-Carlo meetodiga leitud lähilahendite tegelikud vead.

Koostan simulatsiooni kasutades teoreemis 2 toodut valemit lahendi esitlusest keskväärtusena

$$u(x) = E(f(X(\tau))e^{-\tau}),$$

kus $\tau = \min(t : X(t) = 0 \vee X(t) = 1)$ ja E on keskväärtus. Kasutades loodud simulatsiooniprogrammi näeme, et Monte-Carlo meetodiga on tõepoolest võimalik leida toodud diferentsiaalvõrrandi lahendi ligikaudseid väärtuseid küllalt väikese veaga. (Kood lisa 5). Järgnevas tabelis on toodud 5 erinevat $u(0,5)$ lähisväärtust, mis on leitud kasutades 10000 protsessi $X(t)$ simulatsiooni sammupikkusega 0,001. Lisaks leiame Monte-Carlo meetodi veahinnangu ja arvutame tegeliku vea. Täpse lahendi väärtus on 0,21676807.

Tabel 1. Simulatsiooni tulemused.

Simulatsiooni väärtus	0,21268925	0,20513326	0,20917065	0,20482966
Monte-Carlo viga	0,00787998	0,00781601	0,00784838	0,00781051
Tegelik viga	0,00407882	0,01163481	0,00759742	0,01193841

Tabelist 1 näeme, et simulatsiooni lahendid ja vead jäävad suhteliselt konstantseks. Paneme tähele, et mõnel juhul on Monte-Carlo veahinnang väiksem tegelikust veast. See on tingitud kasutatud ajasammust sõltuva täiendava vea olemasolust, mida uurime hiljem.

Järgnevalt vaatame simulatsiooni väärtusi kolmes erinevas punktis $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$. Tegelikud väärtused on vastavalt 0,37400422, 0,21676807 ja 0,11439202.

Tabel 2. Simulatsiooni väärtused kolmes erinevas punktis.

	$u(\frac{1}{3})$	$u(\frac{1}{2})$	$u(\frac{2}{3})$
Sim.väärtus	0,35259422	0,21268925	0,11346911
Monte-Carlo viga	0,00897610	0,00787998	0,00653683
Tegelik viga	0,02141000	0,00407882	0,00092291

Näeme, et erinevates punktides annab simulatsioon ikka päris täpsed lahendid.

Järgnevalt veendume $u(\frac{1}{2})$ arvutamisel katseliselt, et kui sammu pikkus läheb väiksemaks, siis toimub lähenemine õigele väärtusele. Vaatame selleks 4 erinevat sammu pikkustega (0,1; 0,01; 0,001; 0,0001) ja 4 erinevat simulatsioonide arvu (100; 1000; 10000; 100000). Järgnevad tulemused panen kõik ühte koondtabelisse.

Tabel 3. Simulatsiooni väärtused. sim.arv = simulatsioonide arv, millest võeti keskmine.

Sim. Arv Sammu pikkus	100	1000	10000	100000
0,1	0,16065607	0,13806797	0,13678864	0,13683342
0,01	0,18540596	0,18239091	0,19602470	0,18846155
0,001	0,15985365	0,22122222	0,20552528	0,20714949
0,0001	0,23648876	0,21701664	0,21570501	0,21644595

Tabelist 3 näeme, et suurendades simulatsioonide arvu ja vähendades sammude pikkust läheneb ligikaudne väärtus täpse lahendi väärtusele.

Uurime lisaks, kuidas muutub viga, kui vähendame sammu pikkust. Me oskame leida viga, mille teeme, kui leiame keskväärtuse eelnevas protsessis. Selleks kasutame Monte-Carlo ligikaudse vea valemit. Kui genereerimiste arv läheneks lõpmatusse, ei ole saadav tulemus sama, mille saaksime, kui väärtusi täpselt arvutada ehk fikseeritud Δt korral jääb lõpuks mingi viga sisse. Meile pakub huvi, kuidas käitub allesjääv viga, kui Δt läheb nulli. Sageli saab näidata, et see käitub ligikaudu nagu

$$C(\Delta t)^q, q \in \mathbb{R}_+, C = \text{cont.}$$

Koonduvuskiiruse parameetri q väärtuse teadasaamiseks sageli leitakse vastavad vead mitme erineva Δt väärtuse korral, kusjuures iga järgmine on eelnevast fikseeritud arv d korda väiksem. Iga järgneva tulemuse viga peaks olema eelmisest d^q korda väiksem. Näiteks kui võtta $d = 2$ s.t jagame Δt igal sammul 2-ga, siis peaks $q = 1$ korral vead ka igal sammul kahanema 2 korda või näiteks $q = 2$ korral 4 korda. Seega saame kogu veaks

$$\text{koguviga} = MC \text{ viga} + C(\Delta t)^q.$$

Kahjuks ei ole C ette teada, kuid eelnev valemi kujust näeb, et kui MC viga on oluliselt väiksem koguveast, siis Δt kahandamisel 2 korda peaks koguviga ka kahanema ligikaudu 2^q korda, sest $C(\Delta t)^q$ läheb 2^q korda väiksemaks. Järgnevalt uurin katseliselt, kas selline käitumine paistab tulemustest välja. Selleks koostan 4 erinevat katset 4 erineva sammuga ja igat simulatsiooni kordan 100000 punktis $\frac{2}{3}$.

Tabel 4. Vigade muutused.

Sammu pikkus	Monte-Carlo viga	Koguviga
$\frac{1}{10}$	0,00115070	0,20115070
$\frac{1}{20}$	0,00124276	0,10124276
$\frac{1}{40}$	0,00130836	0,05130836
$\frac{1}{80}$	0,00134675	0,02634675

Näeme, et koguviga käitub vastavalt koonduvuskiirusele $q = 1$, kuna vähendades sammu pikkust 2 korda väheneb ka koguviga 2 korda.

Vaatleme nüüd teist juhtu, kus

$c = 1, b_1 = 1, a = 0, b = 1, g(x) = x^2$. Kood on lisas 6.

Toimime nagu eelnevalt, kuid seekord $g(x) \neq 0$. Et leida $u(x)$ esituses oleva integraali väärtust, kasutame riskülikuvalemit, kus saame, et

$$\int_0^{\tau} g(X_t) e^{-t} dt \approx \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{\tau}{\Delta t} \right\rceil} X_{i-1} e^{-(t_{i-1})} \Delta t,$$

kus X_i on $X(t_i)$ lähisväärtus ning $t_i = i\Delta t$.

Järgnevalt toon välja tulemused 4 erineva sammuga ja 100000 kordusega simulatsioonide lahendid. Algpunktideks on $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3})$. Täpse lahendi väärtused on vastavalt (0,07628695; 0,04786539 ;0,03627717).

Tabel 5. Teise diferentsiaalvõrrandi lahendid.

Sammu pikkus	$u(\frac{1}{3})$	$u(\frac{1}{2})$	$u(\frac{2}{3})$
0,1	0,06157752	0,06089053	0,06676582
0,01	0,06976493	0,05317747	0,04508001
0,001	0,07287056	0,04967673	0,03894949
0,0001	0,07432501	0,04839299	0,03683465

Näeme, et sammude pikkuse vähenedes läheneb simulatsiooni lahend tegelikule lahendi väärtustele.

Pakub lisaks huvi, kas siin muutub Monte-Carlo ligikaudne viga samamoodi kui eelnevalt. Siin vaatame olukorda, kus sammude pikkus väheneb 10 korda. Sooviksime näha, et siis ka kogu viga väheneks 10 korda. Vaatame tulemusi punktis $\frac{1}{2}$.

Tabel 6. Teise diferentsiaalvõrrandi vigade muutused.

Sammu pikkus	Simulatsiooni lahend	MC viga	Kogu viga
0,1	0,06089053	0,00026258	0,20026258
0,01	0,05317747	0,00031000	0,02031000
0,001	0,04967673	0,00035905	0,00235905
0,0001	0,04839299	0,00038175	0,00058175

Tõepoolest kogu viga väheneb umbes 10 korda kui vähendades sammude pikkust ka 10 korda, seega võime öelda, et eeldav käitumine kajastub meie tulemustes.

Solving differential equations with simulations

Bachelor's thesis

Rauno Näksi

Summary

The aim of the present Bachelors' thesis „Solving differential equations with simulations,, is to present and to test numerically theoretical results that allow one to compute values of solutions to differential equations by simulating the behavior of certain stochastic processes.

The most fundamental example of a stochastic process is standard Brownian motion or a standard Wiener process. It has many applications, for example in physics (diffusion theory) or in economy (stock price behavior). It turns out that Brownian motion and other processes derived from Brownian motion are directly related to the solutions of differential equations.

In Chapter 1 we introduce Brownian motion and in Chapter 2 we discuss how additional processes can be derived from it by stochastic differential equations. In Chapter 3 of the thesis we present a result that expresses the value of a solution to a differential equation as expected value of certain process derived from Brownian motion. Expected values can be computed by Monte Carlo (or simulation) method. At the end of Chapter 3 the main results about estimating the error of results obtained by Monte Carlo method are given. In Chapter 4 some numerical experiments are performed to demonstrate the validity of the theoretical results and to study the behavior of the additional error caused by using a finite time step for simulating the values of the underlying stochastic process. It turned out that this additional error is proportional to the time step.

In many cases when finding exact solution for differential equations is too hard or requires too much resources it is a lot more beneficial to use a simulations to find an approximate solutions. As we showed above using a simulation we get with a little effort a very good approximation to the value of the exact solution. To find an exact solution is often too much waste of recourses and in some cases simulations are one of the fastest ways to get what is wanted.

Viited

A. Ermogenous (2006). Brownian motion and its applications in the stock market. http://academic.udayton.edu/EPUMD/Volume%202_2006/brownian2.pdf.

Department of Applied Mathematics, Illinois Institute of Technology, Chicago, IL, USA.

G. Maruyama (1955). Continuous Markov processes and stochastic equations. Rend. Circ. Mat. Palermo 4: 48-90. Springer-Verlag.

C. R. Shalizi (2013). Stochastic Differential Equations <http://vserver1.cscs.lsa.umich.edu/~crshalizi/notabene/stoch-diff-eqs.html>.

Department of Statistics, Carnegie Mellon University. Viimati vaadatud mai 2013.

M. Möls (2012). Monte-Carlo meetodid kursuse materjalid. Matemaatika-informaatikateaduskond, Matemaatilise statistika instituut, Tartu ülikool, Tartu.

R. Kangro (2006). Simulatsioonimeetodid finantsmatemaatikas. <http://kodu.ut.ee/~rkangro/MC08/MonteCarlo08.pdf> Matemaatika-

informaatikateaduskond, Matemaatilise statistika instituut, Tartu ülikool, Tartu. Viimatu vaadatud mai 2013.

R. Kangro (2011). Tõenäosusteooria I aine materjalid. http://kodu.ut.ee/~rkangro/tnt1/2011/tnt1_11.pdf Matemaatika-

informaatikateaduskond, Matemaatilise statistika instituut, Tartu ülikool, Tartu. Viimati vaadatud mai 2013.

K. Pärna (2013). Tõenäosusteooria algkursus. Matemaatika-informaatikateaduskond, Matemaatilise statistika instituut, Tartu ülikool, Tartu. Tartu ülikooli kirjastus.

K. Pärna (2006). Martingaalid loengukonspekt kevad 2006. http://www.ms.ut.ee/ained/Martingaalid/Martingaalid_09.pdf Matemaatika-

informaatikateaduskond, Matemaatilise statistika instituut, Tartu ülikool, Tartu.

B. Øksendal (2000). Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications, Fifth Edition, Corrected Printing. Springer-Verlag, Heidelberg, New York.

I. Karatzas, S. Shreve (1994). Brownian Motion and Stochastic Calculus. Position 7.2, In 364. Berlin, Springer-Verlag.

M. Richardson (2009). Stochastic Differential Equations Case Study. Mathematical Institute, University of Oxford.

Lisad

Pythoni koodid, osad.

Lisa1: Viljatera

```
from pylab import*
import random
nKorda = 1
while nKorda > 0 :
    #Kui pikk tuleb aja telg
    maxAeg = 1
    #Ühe sammu pikkus
    dt = 0.0001
    x = 0.5
    y = 0.5
    X = []
    Y = []
    plot(x,y,'+')
    X.append(x)
    Y.append(y)
    while (x < maxAeg) and (y < maxAeg) and (x > 0) and (y > 0):
        # Browni liikumine x teljel
        Bt1 = random.normalvariate(0,math.sqrt(dt))
        x += Bt1
        # Browni liikumine y teljel
        Bt2 = random.normalvariate(0,math.sqrt(dt))
        y += Bt2
        X.append(x)
        Y.append(y)
    plot(X,Y)
    xlabel('X')
    ylabel('Y')
    nKorda -= 1
savefig('BMviljatera.png')
show()
```

Lisa 2: Browni liikumine 5 trajektoori

```
from pylab import*
import random
nKorda = 5
while nKorda > 0 :
    #Kui pikk tuleb aja telg
    maxAeg = 10.0
    #Ühe osa pikkus
    dt = 0.01
    x = 0.0
    t = 0.0
    Ajad = []
    Xid = []
    Ajad.append(t)
    Xid.append(x)
    while t <= maxAeg:
        g1 = random.normalvariate(0,math.sqrt(dt))
        x += g1
        t += dt
        Ajad.append(t)
        Xid.append(x)
    plot(Ajad,Xid)
    xlabel('Aeg')
```

```

    ylabel('Väärtus')
    nKorda -= 1
savefig('BMn1.png')
show()

```

Lisa 3: Ito valemisse saadud väärtuste illustreerimine

```

from pylab import*
import random
nKorda = 5
kordi = []
while nKorda > 0 :
    vahemik = 1
    #Ühe sammu pikkus
    dt = 0.01
    x = 0.0
    t = 0.0
    Ajad = []
    Xid = []
    Ajad.append(t)
    Xid.append(x)
    lug=1
    # kordame kuni trajektoori läheb välja [-vahemik,vahemik]
    while (x < vahemik) and (x > (-1)*vahemik) :
        # Browni liikumise lisanduv suurus
        Bt = random.normalvariate(0,math.sqrt(dt))
        x += Bt
        t += dt
        Ajad.append(t)
        Xid.append(x)
        lug += +1
    if x <= vahemik :
        vahemik=vahemik*(-1)
    print(str(vahemik)+" "+str(lug))
    kordi.append(lug)
    plot(Ajad,Xid)
    xlabel('Aeg')
    ylabel('Vaartus')
    nKorda -= 1
print(kordi)
savefig('BMvahemik.png')
show()

```

Lisa 4: EM meetod. Matlab

```

T=1; % Intervall [0,T]
n=2^8; % Punktide arv Browni liikumises
X0=1; % Algseisund
dt=T/n; % Sammu pikkus
dW=sqrt(dt)*randn(1,n); % Browni liikumine
W=cumsum(dW); % Wiener protsess
lambda=2;mu=1; % Parameetrid
f=@(x) lambda*x;
g=@(x) mu*x; % f ja g funktsioonid
R=64; % R väärtused
det=R*dt; % delta t
samm=n/R; % EMI sammude arv
X=zeros(samm,1);
Xold=X0;
for i=1:samm

```

```

    X(i) = Xold + det*f(Xold) + g(Xold)*sum(dW((R*(i-1)+1):R*i));
    Xold=X(i);
end
X01=1; % Teine algseisung
R1=32; % Teine R väärtus
det1=R1*dt;
samm1=n/R1;
X1=zeros(samm1,1);
Xold1=X01;
for i=1:samm1
    X1(i) = Xold1 + det1*f(Xold1) + g(Xold1)*sum(dW((R1*(i-1)+1):R1*i));
    Xold1=X1(i);
end
X02=1; % Kolmas algseisung
R2=16; % Kolmas R väärtus
det2=R2*dt;
samm2=n/R2;
X2=zeros(samm2,1);
Xold2=X02;
for i=1:samm2
    X2(i) = Xold2 + det2*f(Xold2) + g(Xold2)*sum(dW((R2*(i-1)+1):R2*i));
    Xold2=X2(i);
end
X021=1; % Neljas algseisund
R21=1; % Neljas R
det21=R21*dt;
samm21=n/R21;
X21=zeros(samm21,1);
Xold21=X021;
for i=1:samm21
    X21(i) = Xold21 + det21*f(Xold21) + g(Xold21)*sum(dW((R21*(i-1)+1):R21*i));
    Xold21=X21(i);
end
X21=[X021;X21];
X2=[X02;X2];
X1=[X01;X1];
X=[X0;X]; Lahend=X0*exp((lambda-0.5*mu^2)*(dt:dt:T)+mu*W);
plot(0:det:T,X,'r-o',0:det1:T,X1,'g-*',0:det2:T,X2,'c-x',0:det21:T,X21,'k-.',0:dt:T,[X0 Lahend])
xlabel('t'),ylabel('X(t)','Rotation',0)
legend('EM hinnang dt=2^2','EM hinnang dt=2^3','EM hinnang dt=2^4','EM hinnang dt=2^8','Täpne lahend','Location','NW')

```

Lisa 5: Esimese diferentsiaalvõrrandi arvutamise simulatsioon.

```

# -*- coding: cp1257 -*-
from pylab import*
import random
import scipy.stats
import math
# Lahendakse  $DV(1/2)u''(x)+(bx)*u'(x)-cu(x)=-g(x)$  lahendus lõigus  $[a,b]$ 

# Vaatab, kus läheb välja trajektoor
def lopp(Xt,a,b):
    if Xt <= a :
        return(b)
    else:
        return(a)

#g(x) funktsioon

```

```

def g(x):
    return(0)

#Lahdab DV simulatsiooniga
def lahendus(a,b,bx,c,dt,kordusi,Xt):
    nKorda = kordusi
    # disp.hinnangu valemis olev sum(Xi**2)
    Xiruuudus = 0
    ux = 0
    Xtabi = Xt
    # teeb simulatsiooni kordusi korra ja võtame sellest keskmise
    while kordusi > 0 :
        t = 0
        Xt = Xtabi
        integraal = 0
        while (Xt < b) and (Xt > a) :
            # Browni liikumise lisatav suurus
            Bt = random.normalvariate(0,sqrt(dt))
            # intergraali summa
            integraal += g(Xt)*e**(-t)
            # Xt väärtused
            Xt += bx*dt + c*Bt
            t += dt
        # kus väljub trajektoori
        valjumine = lopp(Xt,a,b)
        Xiruuudus += (valjumine*exp(-1*t*c)+integraal*dt)**2
        # DV simulatsiooni summa
        ux += valjumine*exp(-1*t*c)+integraal*dt
        kordusi -= 1
    # keskmise võtmine saadud simulatsiooni summast
    uxlopp = ux/nKorda
    dispersioonhinnang = (Xiruuudus-(ux**2)/nKorda)/(nKorda-1)
    alpha = 0.1
    fi = round(scipy.stats.norm.ppf(1-alpha/2),3)
    # Monte-Carlo viga
    epsilon = (fi*sqrt(dispersioonhinnang))/sqrt(nKorda)+2*dt
    print("Viga: " + str(epsilon))
    return(print("Minu: " + str(uxlopp)))

# DV lõik
a = 0
b = 1
# DV olevad kordajad
bx = 1
c = 1
# sammu pikkus
dt = 0.001
kordusi = 1000
# DV lahend punktis Xt
Xt = 1/2

lahendus(a,b,bx,c,dt,kordusi,Xt)

# Täpne lahend
ktr = Xt
kontrol = (math.exp(-1*(1+math.sqrt(3))*ktr)*(math.exp(2*math.sqrt(3))-
    math.exp(2*math.sqrt(3)*ktr)))/(math.exp(2*math.sqrt(3))-1)
print("Real: " + str(kontrol))

```

Lisa 6: Teise diferentsiaalvõrrandi arvutamise simulatsioon.

Sama peaaegu kui Lisa 5. Viisin sisse järgnevad muudatused

#g(x) funktsioon

```
def g(x):  
    return(x**2)
```

DV olevad kordajad

bx = 5

c = 1

Täpne lahend

ktr = Xt

abi1 = e**(6*math.sqrt(3))

abi2 = e**(-3*math.sqrt(3)-5)

abi3 = e**((3*math.sqrt(3)-5)*ktr)

kontrol = round((-1/(abi1-1))*(-abi1*ktr**2+ktr**2+10*ktr-10*abi1*ktr-50*abi3-
62*abi2**ktr*e**(3*math.sqrt(3)+5)+
50*abi2**ktr*e**(6*math.sqrt(3))+62*abi3*e**(3*math.sqrt(3)+5)-51*abi1+51),8)

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina Rauno Näksi

25.05.1991

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Diferentsiaalvõrrandite lahendamine simulatsioonide abil,

mille juhendaja on dotsent Raul Kangro,

1.1.reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2.üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus **06.05.2013**